ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 539.1
DOI 10.25587/SVFU.2022.41.78.003

И. С. Кычкин, В. И. Сивцев

Северо-Восточный федеральный университет им. М.К. Аммосова, г. Якутск, Россия
E-mail: kof_fti@mail.ru
E-mail: vi.sivtcev@s-vfu.ru

Релятивистский оператор энергии магнитных взаимодействий электронов

Аннотация. Тяжелые многоэлектронные атомы и многозарядные ионы с

$$\left(\alpha Z\right)^2 \sim \frac{v^2}{c^2} \geq 0,01$$

представляют собой релятивистские системы, для исследования энергетических спектров которых обязательны учет магнитных взаимодействий электронов и работа в *j*–представлении, т. к. орбитальное квантовое число в этих случаях становится плохим квантовым числом. В данной статье релятивистский квантовомеханический подход в базисе связанных релятивистских функций Дираковского типа, т. е., функций – биспиноров с большей и меньшей компонентами, применен для вычисления релятивистских матричных элементов оператора энергии магнитных взаимодействий электронов в приближении Брейта в случае одной оболочки с любым числом эквивалентных электронов. Функция связанных моментов оболочки эквивалентных электронов получена с помощью коэффициентов Клебша-Гордана и генеалогических коэффициентов. Оператор Брейта, ответственный за магнитные взаимодействия электронов, преобразован к виду, удобному для исследования матричных элементов оператора относительно функций связанных моментов в j – представлении. Упрощение формул для матричных элементов оказалось возможным при использовании операторов Казимира симплектической группы $Sp\left(2j+1\right)$.
Ключевые слова: оператор рождения электрона, оператор уничтожения электрона, оператор магнитных взаимодействий, коэффициент Клебша-Гордана, *j*-представление, генеалогический коэффициент, оператор Казимира, единичный тензорный оператор.

I. S. Kychkin, V. I. Sivtsev

M.K. Ammosov North-Eastern Federal University, Yakutsk, Russia
E-mail: kof_fti@mail.ru
E-mail: vi.sivtcev@s-vfu.ru

Relativistic energy operator of magnetic interactions of electrons

Abstract. Heavy multielectron atoms and multicharged ions with

$$\left(\alpha Z\right)^2 \sim \frac{v^2}{c^2} \geq 0,01$$

are relativistic systems. Studying their energy spectra requires considering the magnetic interactions of electrons and operation in the j-representation since the orbital quantum number in these cases becomes a bad quantum number. We use the relativistic quantum mechanical approach on the basis of coupled relativistic Dirac-type functions (functions-bispinors with larger and smaller components) to calculate the relativistic matrix elements of the energy operator of electron magnetic interactions in the Breit approximation in the case of one shell with any number of equivalent electrons. The function of the coupled moments of the shell of equivalent electrons is obtained using the Clebsch-Gordan coefficients and coefficients of fractional parentage. The Breit operator is responsible for the magnetic interactions of electrons. It has been transformed into a convenient form for studying the matrix elements of the operator regarding the functions of the coupled moments in the j-representation. It is possible to simplify the formulas for matrix elements when using the Casimir operators of the symplectic group $Sp(2j+1)$.
Keywords: electron creation operator, electron annihilation operator, magnetic interaction operator, Clebsch-Gordan coefficient, j-representation, coefficients of fractional parentage, Casimir operator, unit tensor operator.

Введение

Работы П. Дирака [1–3] стали началом релятивистских квантовомеханических исследований энергетических спектров атомов и ионов. В них П. Дирак разработал квантовомеханическую релятивистскую теорию водородоподобного атома. В работах [4–6] Г. Брейт исследовал релятивистские взаимодействия двухэлектронных систем. За все прошедшие годы проведено много теоретических исследований в области физики спектров атомов и ионов. Наиболее универсальными и хорошо себя проявившими являются методы Хартри и Хартри – Фока. Но они особо хорошо показали себя в *LS*–представлении, что, конечно, удобно для экспериментаторов, но неестественно для учета релятивистских поправок. Для тяжелых многоэлектронных атомов и ионов большой степени ионизации релятивистские вклады становятся уже не поправками, а становятся величинами сравнимого порядка с нерелятивистскими. А в последние десятилетия в связи с более совершенными наблюдениями высокоионизированных атомов и ионов в естественных и лабораторных условиях заметно вырос интерес в исследовании спектров многоэлектронных атомов и многозарядных ионов [7–15]. Теоретические исследования спектров таких систем из-за того, что для таких систем орбитальное число становится плохим квантовым числом, необходимо обязательно вести в естественном для релятивизма *j*–представлении.

1. Релятивистский оператор энергии магнитных взаимодействий электронов

Релятивистский оператор H_{ij}^{m} энергии магнитных взаимодействий электронов в приближении Брейта [4–6] имеет вид (в а. е.):

$$H_{ij}^{m} = -\frac{\left(\vec{\alpha}_i \cdot \vec{\alpha}_j\right)}{r_{ij}}, \tag{1.1}$$

где r_{ij} – расстояние между i – м и j – м электронами, $\vec{\alpha}$ – четырехмерная матрица Дирака:

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

а $\vec{\sigma}$ – двухмерная матрица Паули.

Оператор магнитных взаимодействий (1.1) может быть представлен как скалярное произведение неприводимых тензорных операторов первого ранга [16]:

$$H_{ij}^{m} = -\frac{\left(\alpha_i^{(1)} \cdot \alpha_j^{(1)}\right)}{r_{ij}} = -r_{ij}^{-1}\left(\alpha_i^{(1)} \cdot \alpha_j^{(1)}\right). \tag{1.3}$$

Разложив r_{ij}^{-1} по сферическим функциям $Y_q^{(k)}$

$$r_{ij}^{-1} = 4\pi \sum_k \frac{1}{\left(2k+1\right)} \cdot \frac{r_<^k}{r_>^{k+1}} \left(Y_i^{(k)} \cdot Y_j^{(k)}\right),$$

введя неприводимый тензорный оператор k – го ранга

$$C_q^{(k)} = \sqrt{\frac{4\pi}{2k+1}} Y_q^{(k)}$$

для оператора магнитных взаимодействий, можно получить выражение, содержащее скалярное произведение неприводимых тензорных операторов $C^{(k)}$ и $\alpha^{(1)}$, действующих независимо в угловом (орбитальном) и спиновом пространствах:

$$H_{ij}^{m} = -\sum_k \frac{r_<^k}{r_>^{k+1}} \left(C_i^{(k)} \cdot C_j^{(k)}\right)\left(\alpha_i^{(1)} \cdot \alpha_j^{(1)}\right). \tag{1.4}$$

Пользуясь тем, что любое скалярное произведение можно выразить через тензорное произведение нулевого ранга, угловую и спиновую часть оператора (1.4) можно представить в виде

$$\left(C_i^{(k)} \cdot C_j^{(k)}\right)\left(\alpha_i^{(1)} \cdot \alpha_j^{(1)}\right) =$$

$$= \sqrt{3\left(2k+\right)} \left[\left[C_i^{(k)} \cdot C_j^{(k)}\right]^{(0)} \left[\alpha_i^{(1)} \cdot \alpha_j^{(1)}\right]^{(0)}\right]^{(0)}. \tag{1.5}$$

Приведенный здесь порядок связывания рангов операторов угловой и спиновой частей соответствует *LS*–представлению, что неестествеенно при релятивистском рассмотрении, т. к. в релятивистском случае орбитальное квантовое число становится плохим квантовым числом и это вынуждает работать в *j*–представлении. Поэтому в (1.5) необходимо изменить порядок связывания рангов (операторов), что несложно из-за коммутативности операторов $C^{(k)}$ и $\alpha^{(1)}$, действующих в разных пространствах, с помощью матрицы преобразования:

$$\left[\left[C_i^{(k)}\times C_j^{(k)}\right]^{(0)}\times\left[\alpha_i^{(1)}\times\alpha_j^{(1)}\right]^{(0)}\right]^{(0)}=$$

$$=\sum_K\left[\left[C_i^{(k)}\times\alpha_i^{(1)}\right]^{(K)}\times\left[C_j^{(k)}\times\alpha_j^{(1)}\right]^{(K)}\right]^{(0)}. \qquad (1.6)$$

$$\cdot k1(K),k1(K),0|kk(0),11(0),0\rangle.$$

Как результат, релятивистский оператор H_{ij}^m энергии магнитных взаимодействий электронов в естественном для релятивизма *j*–представлении принимает вид:

$$H_{ij}^m=-\sum_{kK}\frac{r_<^k}{r_>^{k+1}}\left(\left[C_i^{(k)}\times\alpha_i^{(1)}\right]^{(K)}\cdot\left[C_j^{(k)}\times\alpha_j^{(1)}\right]^{(K)}\right). \qquad (1.7)$$

Здесь мы воспользовались численным значением матрицы преобразования. Оператор (1.7), выраженный через 4 – матрицы Дирака, лучше представить через 2 – матрицы Паули:

$$H_{ij}^m=-\sum_{kK}\frac{r_<^k}{r_>^{k+1}}\left(\left[C_i^{(k)}\times\begin{pmatrix}0&\sigma_i^{(1)}\\\sigma_i^{(1)}&0\end{pmatrix}\right]^{(K)}\cdot\left[C_j^{(k)}\times\begin{pmatrix}0&\sigma_j^{(1)}\\\sigma_j^{(1)}&0\end{pmatrix}\right]^{(K)}\right). \qquad (1.8)$$

Так как оператор с индексом *i(j)* действует *i(j)*–й электрон, т. е. они действуют на разные электроны, то в (1.8) произведение двумерных матриц должно быть прямым, а не обычным матричным. Поэтому оператор H_{ij}^m энергии магнитных взаимодействий электронов будет 4 – матрицей

$$H_{ij}^m=\begin{pmatrix}h_{11}&h_{12}&h_{13}&h_{14}\\h_{21}&h_{22}&h_{23}&h_{24}\\h_{31}&h_{32}&h_{33}&h_{34}\\h_{41}&h_{42}&h_{43}&h_{44}\end{pmatrix}, \qquad (1.9)$$

в которой отличаются от нуля лишь элементы косвенной диагонали матрицы:

$$h_{14}=h_{23}=h_{32}=h_{41}=-\sum_{kK}\frac{r_<^k}{r_>^{k+1}}\cdot$$

$$\cdot\left(\left[C_i^{(k)}\times\sigma_i^{(1)}\right]^{(K)}\cdot\left[C_j^{(k)}\times\sigma_j^{(1)}\right]^{(K)}\right), \qquad (1.10)$$

а все остальные элементы матрицы равны нулю.

2. Матричные элементы. Двухэлектронный случай.

Если в качестве базиса брать релятивистские функции – биспиноры типа дираковских

$$|\lambda m=\begin{pmatrix}f(\lambda|r)\cdot|\mu m)\\(-1)^\beta g(\lambda'|r)\cdot|\mu' m)\end{pmatrix}, \qquad (2.1)$$

то неантисимметризованная двухэлектронная функция связанных моментов принимает вид [16]

$$\left|12JM\right) = \begin{pmatrix} \left|\mu_1\mu_2JM\right) f\left(\lambda_1\middle|r\right) f\left(\lambda_2\middle|r\right) \\ \left|\left(-1\right)^{\beta_2}\left|\mu_1\mu_2^{'}JM\right) f\left(\lambda_1\middle|r\right) g\left(\lambda_2^{'}\middle|r\right)\right) \\ \left|\left(-1\right)^{\beta_1}\left|\mu_1^{'}\mu_2JM\right) g\left(\lambda_1^{'}\middle|r\right) f\left(\lambda_2\middle|r\right)\right) \\ \left|\left(-1\right)^{\beta_1+\beta_2}\left|\mu_1^{'}\mu_2^{'}JM\right) g\left(\lambda_1^{'}\middle|r\right) g\left(\lambda_2^{'}\middle|r\right)\right) \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

в которой связь моментов осуществляется с помощью коэффициентов Клебша – Гордана (ККГ).

В случае двухэквивалентных электронов λ^2 с учетом принципа Паули

$$\left(1,1\middle|\middle|2J\right) = \frac{1+\left(-1\right)^J}{2},$$

можно получить формулу для матричного элемента оператора (1.9) энергии магнитных взаимодействий электронов через произведение угловой и радиальной частей:

$$\lambda^2 J|H^m|\lambda^2 J = \sum_{k-=5G} d_k\left(2J\right) R_k\left(\lambda\lambda,\lambda'\lambda'\right). \tag{2.3}$$

$$d_k\left(2J\right) = \frac{4\left(2j+1\right)^3}{\left(2k+1\right)} \begin{Bmatrix} j & j & J \\ j & j & k \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} j & j & k \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}^2, \tag{2.4}$$

а радиальный интеграл

$$R_k\left(\lambda\lambda,\lambda'\lambda'\right) = \int\int_0^\infty f\left(\lambda\middle|r_1\right) f\left(\lambda\middle|r_2\right) \frac{r_<^k}{r_>^{k+1}} g\left(\lambda'\middle|r_1\right) g\left(\lambda'\middle|r_2\right) r_1^2 r_2^2 dr_1 dr_2. \tag{2.5}$$

Коэффициент Клебша – Гордана, фигурирующий в формуле (2.4), может быть заменен на более простой ККГ:

$$\begin{bmatrix} j & j & k \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \frac{\left(2j+1\right)}{\sqrt{k\left(k+1\right)}} \begin{bmatrix} j & j & k \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.6}$$

В (2.3) показ того, что суммирование по k должно быть по нечетным значениям ранга k, необязателен, т. к. ККГ

$$\begin{bmatrix} j & j & k \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = 0 \text{ при } k - \text{четно}.$$

3. Матричные элементы. Случай оболочки эквивалентных электронов

Рассмотрим случай оболочки λ^N эквивалентных электронов. В этом случае оператор H^m энергии магнитных взаимодействий, пользуясь эквивалентностью электронов, представим в виде

$$H^m = \sum_{i>j} H_{ij}^m = \frac{N(N-1)}{2} H_{ij}^m, \tag{3.1}$$

где i и j могут относится к координатам любых двух электронов из оболочки λ^N.

Тогда искомый релятивистский матричный элемент оператора H^m относительно оболочки λ^N эквивалентных электронов может быть выражен через двухэлектронные матричные элементы (2.3) этого оператора и генеалогические коэффициенты, использованные для антисимметризации функций состояний:

$$\left\langle \lambda^N \alpha J \middle| H^m \middle| \lambda^N \alpha' J' \right\rangle = \delta(J, J') \frac{N(N-1)}{2} *$$

$$* \sum \left(N-2, 2 \| N\alpha \right) \left\langle \lambda^2 J_2 \middle| H^m \middle| \lambda^2 J_2 \right\rangle (N-2, 2 \| N\alpha'), \tag{3.2}$$

где суммирование производится по промежуточным состояниям $(N-2)$ и 2 электронов. Введя одноэлектронный оператор [16]

$$t^k = -\frac{1}{\sqrt{(2k+1)}} \left[a^{(j)} \times \tilde{a}^{(j)} \right], \tag{3.3}$$

где $a_m^{(j)}$ – оператор рождения электрона в состоянии $|jm\rangle$, формулу (3.2) можно привести к более простому виду:

$$\left\langle N | H^m | N' \right\rangle = \sum_{k-\text{неч}} d_k (N\alpha\alpha') R_k (\lambda\lambda, \lambda'\lambda'). \tag{3.4}$$

Здесь

$$d_k (N\alpha\alpha') = -\frac{4(2j+1)^3}{k(k+1)\sqrt{(2J+1)}} \begin{bmatrix} k & j & j \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^2 \left(N \middle\| T^{kk0} \middle\| N' \right), \tag{3.5}$$

$$T^{kk0} = \left[T^k \times T^k \right]^0, \tag{3.6}$$

$$T^k = \sum t_i^k. \tag{3.7}$$

Операторы t^k (3.3) с нечетными рангами k, принимающими значения

$$k = 1, 3, \ldots, 2j, \tag{3.8}$$

являются инфинитезимальными операторами симплектической группы $Sp(2j+1)$, т. е. оператор Казимира симплектической группы может быть представлен в виде [4]:

$$G\left(Sp(2j+1) \right) = 2 \sum_{k-\text{неч}} T^{kk0}. \tag{3.9}$$

Собственные значения оператора Казимира в базисе функций связанных моментов состояний оболочки эквивалентных электронов λ^N выражаются через числа старшинства v состояний электронов:

$$\left\langle G\left(Sp\left(2j+1\right)\right)\right\rangle = \delta\left(\alpha,\alpha'\right)v\left(2j+3-v\right). \tag{3.10}$$

Это позволяет получить следующие простые алгебраические формулы для коэффициентов d_k:

$$d_1\left(N\alpha\alpha'\right) = \delta\left(\alpha,\alpha'\right)\frac{\left(2j+1\right)^2}{4j\left(j+1\right)}\left[N - \frac{J\left(J+1\right)}{j\left(j+1\right)}\right], \tag{3.11}$$

$$d_k\left(j^{[j]}\right) = \delta\left(\alpha,\alpha'\right)\frac{2\left(2j+1\right)^3}{k\left(k+1\right)}\begin{bmatrix} k & j & j \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}^2, \tag{3.12}$$

$$d_3\left(\frac{3}{2},N\right) = \frac{24}{245}\left(2v^2 - 12v + 7N + \frac{4}{5}J\left(J+1\right)\right), \tag{3.13}$$

$$d_3\left(\frac{5}{2},N\right) = \frac{4}{735}\left(25v^2 - 200v + 84N + \frac{52}{5}J\left(J+1\right)\right), \tag{3.14}$$

$$d_5\left(\frac{5}{2},N\right) = \frac{40}{1617}\left(\frac{7}{4}v^2 - 14v + 21N - J\left(J+1\right)\right). \tag{3.15}$$

Из (3.4) и (3.5) можно получить связь между релятивистскими матричными элементами оператора H^m энергии магнитных взаимодействий для разных чисел N_1 и N_2 эквивалентных электронов в оболочках:

$$\left\langle N_1|H^m|N_1\right\rangle = \left\langle N_2|H^m|N_2\right\rangle + \sum_{k-\text{неч}} d_k\left(N_1N_2\right)R_k\left(\lambda\lambda,\lambda'\lambda'\right), \tag{3.16}$$

где

$$d_k\left(N_1N_2\right) = \frac{2\left(N_1-N_2\right)\left(2j+1\right)^2}{k\left(k+1\right)}\begin{bmatrix} k & j & j \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}^2. \tag{3.17}$$

Для коэффициентов d_k можно установить правила сумм:

$$\sum_{\alpha J}\left(2J+1\right)d_k\left(N\alpha J\right) = \frac{2\left(2j-1\right)!\left(2j+1\right)^3}{k\left(k+1\right)\left(2j+1-N\right)!\left(N-2\right)!}\begin{bmatrix} k & j & j \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}^2, \tag{3.18}$$

$$\sum_{k-\text{неч}} k\left(k+1\right)\left(2k+1\right)\frac{d_k\left(N\alpha J\right)}{\begin{bmatrix} k & j & j \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^2} = \left(2j+1\right)^3\left(v\left(v-1\right)+2\left(j+1\right)\left(N-v\right)\right). \tag{3.19}$$

Обозначения

1. $\lambda = nlj,\ \lambda' = nl'j,\ l' = 2j - l,\ \beta = \frac{1}{2}\left(1 + l - l'\right)$

2. $\mu = lj,\ \mu' = l'j,\ l' = 2j - l,$

3. $\left|\mu m\right) = \left|ljm\right) = \sum_{m_l m_s}\left|lm_l\right)\left|sm_s\right)\begin{bmatrix} l & s & j \\ m_l & m_s & m \end{bmatrix}$

4. $d_k\left(N\right) = d_k\left(j^N J\right) = d_k\left(j^N \alpha J\right)$

5. $\left|A\right\rangle = \left|n_A l_A j_A\right\rangle = \left|\lambda_A\right\rangle$

6. $\left|ABJM\right\rangle = \left|n_A l_A j_A n_B l_B j_B JM\right\rangle = \left|\lambda_A \lambda_B JM\right\rangle$

7. $\left|\left|12JM\right\rangle = \left|n_1 l_1 j_1 n_2 l_2 j_2 JM\right\rangle = \left|\lambda_1 \lambda_2 JM\right\rangle\right.$

8. $\left|N\right\rangle = \left|j, N\right\rangle = \left|j^N \alpha J\right\rangle = \left|j^N \alpha v J\right\rangle = \left|j, N, \alpha J\right\rangle = \left|N, \alpha J\right\rangle$

9. $\left|N'\right\rangle = \left|j, N'\right\rangle = \left|j^N \alpha' J'\right\rangle = \left|j^N \alpha' v' J'\right\rangle = \left|j, N, \alpha' J'\right\rangle = \left|N, \alpha' J'\right\rangle$

10. $\left|j_1^{N_1} j_2^{N_2} \alpha_1 J_1 \alpha_2 J_2 J\right\rangle = \left|j_1 j_2 \alpha_1 J_1 \alpha_2 J_2 J\right\rangle = \left|N_1 N_2 \alpha_1 J_1 \alpha_2 J_2 J\right\rangle$

$$= \left|N_1 N_2 J_1 J_2 J\right\rangle = \left|N_1 N_2 J\right\rangle = \left|N_1 N_2\right\rangle,$$

11. $\left|N_1' N_2'\right\rangle = \left|j_1^{N_1} j_2^{N_2} \alpha_1' J_1' \alpha_2' J_2' J'\right\rangle,$

12. $\left|\psi\right\rangle$ – релятивистский кет – вектор

    $\left|\psi\right)$ – нерелятивистский кет – вектор

13. $\left(j^{N-p}\alpha_1 J_1, j^p \alpha_2 J_2 \left\|j^N \alpha J\right.\right) = \left(N-p, p\|N\right)$

Заключение

Полученные формулы дают возможность (в $\frac{v^2}{c^2}$ приближении) исследовать и рассчитывать энергии магнитных взаимодействий эквивалентных электронов в оболочке nlj^N в базисе релятивистских функций – биспиноров дираковского типа, естественном для релятивистского подхода. В последующем необходимы аналогичные исследования в случаях бóльшего числа оболочек.

Литература

1. Дирак, П. А. М. Собрание научных трудов. Т. 2. Квантовая теория (научные статьи 1924–1947). – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 848 с. – (Классики науки). – ISBN 5-9221-0381-4 (Т. II).

2. Берестецкий, В. Б. Релятивистская квантовая теория : ч. 1 / В. Б. Берестецкий, Б. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский. – Москва : Наука, 1968, – 480 с.

3. Ахиезер, А. И. Квантовая электродинамика / А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий. – Москва : Наука, 1981. – 428 с..

4. Breit, G. The Effect of Retardations on the Interactions of Two Electrons / G. Breit // Phys. Rev. – 1929. – V. 34. – P. 553.

5. Breit, G. The Fine Structure of HE as a Test of the Spin Interactions Two Electrons / G. Breit // Phys. Rev. – 1930. – V. 36. – P. 383.

6. Breit, G. Dirac's Equation and the Spin-Spin Interactions of Two Electrons / G. Breit // Phys. Rev. – 1932. – V. 39. – P. 616.

7. Ralchenko, Yu. Spectroscopy of diagnostically important magnetic-dipole lines in highly charged $3d^n$ ions of tungsten / Yu. Ralchenko, I. N. Draganić, D. Osin [et. al.] // Phys. Rev. A. – 2011. – Vol. 83. – No 032517.

8. Osin, D. EUV magnetic-dipole lines from highly-charged high-Z ions with an open 3d shell / D. Osin, J. D. Gillaspy, J. Reader, Yu Ralchenko // Eur. Phys. J. D. – 2012. – Vol. 66. – № 286. – Pp. 1–10.

9. Zhao, Z. L. Multi-configuration Dirac–Hartree–Fock calculations of forbidden transitions within the $3d^k$ ground configurations of highly charged ions (Z=72–83) / Z. L. Zhao, K. Wang, S. Li [et. al.] // At. Data Nucl. Data Tables. – 2018. – Vol. 119, 314.

10. Froese Fisher C. Core Effects on Transition Energies for $3d^k$ Configurations in Tungsten Ions / C. Froese Fisher, G. Gaigalas, P. Jönsson. // Atoms. – 2017. – Vol. 5. – № 7. – Pp. 1–34.

11. Hawryluk, R. Principal physics developments evaluated in the ITER design review / R. Hawryluk, D. Campbell, G. Janeschitz [et al.] // Nucl. Fusion. – 2009. – Vol. 49. – № 0650129. – Pp. 1–15.

12. Arvanitaki, A. Searching for dilaton dark matter with atomic clocks /A. Arvanitaki, J. Huang, K. Van Tilburg // Phys. Rev. D. – 2015. – Vol. 91. – № 015015. – Pp. 1–17.

13. Roberts, B. M. Search for domain wall dark matter with atomic clocks on board global positioning system satellites / G. Blewitt, C. Dailey //Nat. Commun. – 2017. – Vol. 8. – № 1195. – Pp. 1–9.

14. Ficek, F. Constraints on exotic spin-dependent interactions between electrons from helium fine-structure spectroscopy / D. F. J. Kimball, M. G. Kozlov [et. al.] // Phys. Rev. A. – 2017. – Vol. 95. – № 032505. – Pp. 1–9.

15. Safronova, M. S. Atomic properties of actinide ions with particle-hole configurations / M. S. Safronova U. I. Safronova M. G. // Phys. Rev. A. – 2018. – Vol. 97. – № 012511. – Pp. 1–5.

16. Кычкин, И. С. Основы релятивистской теории многоэлектронных атомов и ионов / И. С. Кычкин. – Москва : Физматлит, 1994. – 273 с.

References

1. Dirak, P. A. M. Sobranie nauchnyh trudov. T. 2. Kvantovaya teoriya (nauchnye stat'i 1924–1947). – Moskva : FIZMATLIT, 2003. – 848 s. – (Klassiki nauki). – ISBN 5-9221-0381-4 (T. II).

2. Beresteckij, V. B. Relyativistskaya kvantovaya teoriya : ch. 1 / V. B. Beresteckij, B. M. Lifshic, L. P. Pitaevskij. – Moskva : Nauka, 1968, – 480 s.

3. Ahiezer, A. I. Kvantovaya elektrodinamika / A. I. Ahiezer, V. B. Beresteckij. – Moskva : Nauka, 1981. – 428 s..

4. Breit, G. The Effect of Retardations on the Interactions of Two Electrons / G. Breit // Phys. Rev. – 1929. – V. 34. – P. 553.

5. Breit, G. The Fine Structure of HE as a Test of the Spin Interactions Two Electrons / G. Breit // Phys. Rev. – 1930. – V. 36. – P. 383.

6. Breit, G. Dirac's Equation and the Spin-Spin Interactions of Two Electrons / G. Breit // Phys. Rev. – 1932. – V. 39. – P. 616.

7. Ralchenko, Yu. Spectroscopy of diagnostically important magnetic-dipole lines in highly charged $3d^n$ ions of tungsten / Yu. Ralchenko, I. N. Draganić, D. Osin [et. al.] // Phys. Rev. A. – 2011. – Vol. 83. – No 032517.

8. Osin, D. EUV magnetic-dipole lines from highly-charged high-Z ions with an open 3d shell / D. Osin, J. D. Gillaspy, J. Reader, Yu Ralchenko // Eur. Phys. J. D. – 2012. – Vol. 66. – № 286. – Pp. 1–10.

9. Zhao, Z. L. Multi-configuration Dirac–Hartree–Fock calculations of forbidden transitions within the $3d^k$ ground configurations of highly charged ions (Z=72–83) / Z. L. Zhao, K. Wang, S. Li [et. al.] // At. Data Nucl. Data Tables. – 2018. – Vol. 119, 314.

10. Froese Fisher C. Core Effects on Transition Energies for $3d^k$ Configurations in Tungsten Ions / C. Froese Fisher, G. Gaigalas, P. Jönsson P. // Atoms. – 2017. – Vol. 5. – № 7. – Pp. 1–34.

11. Hawryluk, D. Principal physics developments evaluated in the ITER design review / R. Hawryluk, D. Campbell, G. Janeschitz [et al.] // Nucl. Fusion. – 2009. – Vol. 49. – № 0650129. – Pp. 1–15.

12. Arvanitaki, A. Searching for dilaton dark matter with atomic clocks /A. Arvanitaki, J. Huang, K. Van Tilburg // Phys. Rev. D. – 2015. – Vol. 91. – № 015015. – Pp. 1–17.

13. Roberts, B. M. Search for domain wall dark matter with atomic clocks on board global positioning system satellites / B. M. Roberts, G. Blewitt, C. Dailey //Nat. Commun. – 2017. – Vol. 8. – № 1195. – Pp. 1–9.

14. Ficek, F. Constraints on exotic spin-dependent interactions between electrons from helium fine-structure spectroscopy / F. Ficek, D. F. J. Kimball, M. G. Kozlov [et. al.] // Phys. Rev. A. – 2017. – Vol. 95. – № 032505. – Pp. 1–9.

15. Safronova, M. S. Atomic properties of actinide ions with particle-hole configurations / M. S. Safronova U. I. Safronova M. G. // Phys. Rev. A. – 2018. – Vol. 97. – № 012511. – Pp. 1–5.

16. Kychkin, I. S. Osnovy relyativistskoj teorii mnogoelektronnyh atomov i ionov / I. S. Kychkin. – Moskva : Fizmatlit, 1994. – 273 s.

КЫЧКИН Иннокентий Саввич – д. ф.-м. н., профессор, проф. кафедры общей и экспериментальной физики ФТИ СВФУ им. М.К. Аммосова.

E-mail: kof_fti@mail.ru

KYCHKIN Innokentij Savvich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, professor of the Department of General and Experimental Physics, Institute of Physics and Technology, M.K. Ammosov North-Eastern Federal University.

СИВЦЕВ Василий Иванович – к. ф.-м. н., доцент, доц. каф. общей и экспериментальной физики ФТИ СВФУ им. М.К. Аммосова.

E-mail: vi.sivtcev@s-vfu.ru

SIVTSEV Vasilij Ivanovich – Associate Professor of the Department of General and Experimental Physics, Institute of Physics and Technology, M.K. Ammosov North-Eastern Federal University.